1ο Μάθημα

ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

19/2/2019

Έστω V ένας γραμμικός σταθμητός χώρος και W ένας υποχώρος του V. Ο V είναι εφοδιασμένος με μια νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε αν $v \in V$, το $w^* \in W$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του v στο W αν-ν

$$\boxed{\|v-w^*\| \le \|v-w\|} \quad \forall\, w \in W$$

⇝ $V = C[a,b] \to$ χώρος των συνεχών συναρτήσεων

⇝ $V = E_m$

Αν X_m είναι το σύνολο των σημείων $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ορίζουμε τον E_m ως χώρο των διακριτών συναρτήσεων $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

⇝ $W = P_n \to$ ο χώρος των πολυωνύμων το πολύ n-βαθμού και διάστασης $n+1$

Ισχύει: $P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_n$

⇝ $W = S_{2k+1} \to$ ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων k-τάξης.

Ορισμός: Τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο της μορφής:

$$\boxed{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \cos(ix) + \sum_{i=1}^{k} b \sin(ix)}$$

Ορισμός: Έστω V ένας σταθμητός γραμμικός χώρος. Ορίζουμε ως νόρμα του V τη συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{+,0}$ αν πληρούνται οι ιδιότητες:

1. $\|v\| \ge 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \forall\, v \in V$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda \in \mathbb{C}$ και $v \in V$
3. $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\| \quad \forall\, v, w \in V$ (τριγωνική ανισότητα)

Νορμες στον $C[a,b]$:

- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$: l_1-νορμα
- $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$: l_2-νορμα
- $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$: l_∞-νορμα

Ολα τα παραπανω ειναι ειδικες περιπτωσεις της νορμας

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad : \ l_p\text{-νορμα} \quad \text{με } p \ge 1$$

⇝ Αποδεικνυεται οτι: $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

↳ Ισχυει και στον διακριτο χωρο E^n

Νορμες στον E^n:

- $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$
- $\|f\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{1/2}$
- $\|f\|_\infty = \max |f_i|$

Γενικά: $\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p\right)^{1/p}$

Ανισοτητα Minkowski:

$$\left(\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

Ανισοτητα Holder:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{όπου } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Ανισοτητα Cauchy-Schwartz:

$$|(f,g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Υπαρξη Βελτιστης Προσεγγισης:

Θεώρημα Έστω V ένας σταθμητός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|$ και W ένας υπόχωρος του V πεπερασμένης διάστασης. Τότε δοθέντος $v \in V$, υπαρχει $w^* \in W$ τετοιο ώστε:

$$\boxed{\|v - w^*\| \le \|v - w\|} \quad \forall\, w \in W$$

Παραδειγμα: Έστω $V = C[a,b] = C[0, 1/2]$ και $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C[0, 1/2]$, $f \notin W$. Να βρεθεί το βελτιστο πολυώνυμο που προσεγγίζει την f.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ τετοιο ώστε

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^N) \right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \|f - p^*\| = 0 \iff p^* = f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{αρα } p^* \in N$$

Αρα δεν υπαρχει βελτιστη προσεγγιση διότι ο υποχωρος ειναι απειρης διαστασης

Ορισμός: Ένα σύνολο $S \subset V$ λέγεται κυρτό στο V αν $s_1, s_2 \in S$ τότε αν $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 \cdot s_2 \in S$ και
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Σχόλιο: Το $\varnothing$ είναι κυρτό σύνολο.

Θεώρημα Έστω V ένας σταθμητός γραμμικός χώρος και W ένας υπόχωρος του V. Το σύνολο όλων των βέλτιστων προσεγγίσεων W^* του V στον W είναι κυρτό.

Απόδειξη: Έστω w_1, w_2 βέλτιστες προσεγγίσεις του V στον W.
$$\|v - w_1\| = \|v - w_2\| = p > 0.$$
Θεωρώ το στοιχείο του W, $w = \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2$ τέτοιο ώστε: $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Τότε: $\|v - w\| = \|v - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 \cdot w_2)\| = \|\lambda_1 (v - w_1) + \lambda_2 (v - w_2)\|$
$\leq \|\lambda_1 (v - w_1)\| + \|\lambda_2 (v - w_2)\| = \lambda_1 \|v - w_1\| + \lambda_2 \|v - w_2\| =$
$= \lambda_1 p + \lambda_2 p = (\lambda_1 + \lambda_2) p = p$

και το $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ είναι βέλτιστη προσέγγιση $w^* \in W$.

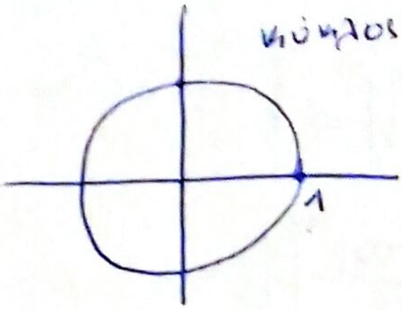
Ορισμός: Έστω V ένας σταθμητός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|$. Η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή στον V αν-ν το σύνολο
$$B = \{ v \in V, \|v\| \leq 1 \}$$ είναι αυστηρά κυρτό.

Δηλ. αν $v_1, v_2 \in B$, $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ τότε
$\|\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2\| < 1$ για $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Αποδεικνύεται ότι η $\| \ \|_2$ είναι αυστηρά κυρτή και στο $C[a,b]$ και στον E_n ενώ η $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ ΔΕΝ είναι κυρτές

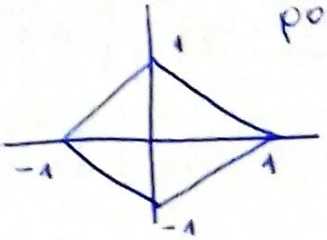
Η B στον $\mathbb{R}^2$:

• κύκλος



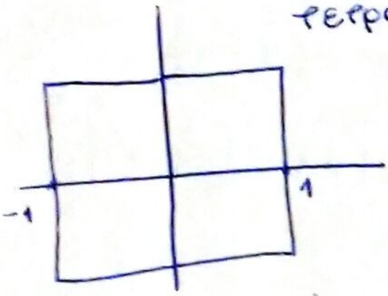
ℓ_2 νόρμα: $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$

• ρόμβος



ℓ_1 νορμα: $\|v\|_1 = |v_1|+|v_2| = 1$

• τετράγωνο



ℓ_∞ νόρμα: $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\}$

Θεώρημα: Έστω V σταθμητός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με αυστηρά κυρτή νόρμα $\|\cdot\|$ και W υπόχωρος του V. Τότε κάθε στοιχείο $v \in V$ έχει το πολύ μια βέλτιστη προσέγγιση στο W.

Πόρισμα: Έστω V εφοδιασμένο με αυστηρά κυρτή $\|\cdot\|$ και W υπόχωρος του V πεπερασμένης διάστασης τότε κάθε στοιχείο $v \in V$ έχει ακριβώς μια βέλτιστη προσέγγιση στον W.

Απόδειξη Θεωρήματος: Έστω w_1^* και w_2^* βέλτιστες προσεγγίσεις του $v \in V$ στον W τότε

$\|v - w_2^*\| = \|v - w_1^*\| = p > 0$

συνέχεια →

Θεωρώ $v_1 = \dfrac{v - w_1^*}{\rho}$, $v_2 = \dfrac{v - w_2^*}{\rho}$

τοτε $\|v_1\| = \|v_2\| = \rho$.

$$\|v_1\| = \left\| \frac{v - w_1^*}{\rho} \right\| = \frac{1}{\rho} \| v - w_1^* \| = 1$$

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot v_1 + \frac{1}{2} \cdot v_2 \right\| = \left\| \frac{v - w_1^*}{2\rho} + \frac{v - w_2^*}{2\rho} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left\| v - \frac{w_1^* + w_2^*}{2} \right\| < 1 \Leftrightarrow \left\| v - \frac{w_1^* + w_2^*}{2} \right\| < \rho$$

άτοπο

Παράδειγμα: Έστω $C[0,1]$ εφοδιασμένος με την ℓ_1-νόρμα. Έστω $v_1 = 2x$ και $v_2 = 2(1-x)$

$$\|v_1\| = \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1 \ , \ \|v_2\| = \int_0^1 2(1-x)\,dx = [2x - x^2]_0^1 = 1$$

Άρα $\|v_1\| = \|v_2\|$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = 1 \ , \ \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} \right\| = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$$

Άρα η ℓ_1 νόρμα δεν είναι αυστηρά κυρτή.

Παράδειγμα: $V = C[0,1]$ με την ℓ_∞-νόρμα.

Θεωρώ $v_1 = x$, $v_2 = 2x - 1$

$$\|v_1\|_\infty = 1 = \|v_2\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |2x - 1|$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3x - 1}{2}$$

$$\left\| \frac{3x-1}{2} \right\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{3x-1}{2} \right| = 1$$

Άρα η ℓ_∞-νόρμα δεν είναι αυστηρά κυρτή

άρα δεν εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης.

Άσκηση 5: Να βρεθεί το σύνολο όλων των βέλτιστων προσεγγίσεων του $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ στο χώρο $\mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ $x, y \in \mathbb{R}$

Λύση:

$$\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix}1-x\\1-y\\1\end{matrix} \right\|_\infty \geq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\left| \begin{matrix}1-x\\1-y\\1\end{matrix} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |1-x| \leq 1 \\ |1-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ y \in [0,2] \end{cases}$$

Άσκηση 1. Ν.δ.ο. $\int_a^b |x \cdot f(x)| dx$ με $f \in C[a,b]$ είναι νόρμα

Λύση: $\int_a^b |x \cdot f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\int_a^b |x \cdot \lambda \cdot f(x)| dx = |\lambda| \cdot \int_a^b |x \cdot f(x)| dx$$

$$\int_a^b |x \cdot (f(x) + g(x))| dx \leq \int_a^b |x \cdot f(x)| dx + \int_a^b |x \cdot g(x)| dx$$